



TITLE:

# Charged Phonons. I

AUTHOR(S):

石井, 忠男

---

CITATION:

石井, 忠男. Charged Phonons. I. 物性研究 1972, 19(2): 186-196

ISSUE DATE:

1972-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88569>

RIGHT:

# Charged Phonons. I

岡大・電子工学教室 石井 忠 男

(10月16日受理)

## § 1. 序 論

古典理論の帰結する Van Leeuwen の定理に反し、自由電子の運動の磁場による量子化が自由エネルギーの磁場依存性を齎し、反磁性効果を生ぜしめることは、Landau の反磁性<sup>1)</sup>としてよく知られている。近年超高磁場への試みがなされ、パルス磁場により数 MOe 乃至数 10 MOe が得られたとの報告<sup>2)</sup>もあるが、このような超高磁場にあつては、電子の運動の量子化のみならず荷電格子の振動に対する量子化が行われることも期待される。因みに Li 金属では温度 100 mK のもとに 10 MOe 磁場を印加すれば、量子条件  $\hbar\omega_c \gtrsim k_B T$  ( $\omega_c$  は Li イオンのサイクロトロン角振動数) を満たす。更に金属はもとより圧電結晶、イオン結晶などに於ても上記効果が期待される。我々は電荷を有す格子の振動が磁場により量子化されたその素励起を“charged phonon”と呼ぼう。この論文では、normal coordinates で定義されたハミルトン函数を用い、Shrödinger 方程式の固有函数及びエネルギー固有値を求め、それを基に § 3. では熱力学的諸量を表わし、特に Debye model での分散関係を予測する。§ 4. では音響分枝による比熱及び反磁性帯磁率の計算を行う。 $\hbar\omega_D \gg k_B T$ ,  $\hbar\omega_c \ll k_B T$  ( $\omega_D$ : Debye の角振動数) の領域で比熱は従来の結果に磁場の効果が加算されるが、 $\hbar\omega_c \gg k_B T$  では全く異った結果を得る。§ 5. で鎖模型による運動と量子論の結果と比較する。

## § 2. Shrödinger 方程式の解

### 2.1 ハミルトン函数

N 個の格子点を持つ系を考える。正準共役量 ( $p, q$ ) とし、charged phonons のハミルトン函数を次の様に定義しよう。有効電荷  $e$  として

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{\lambda=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left( P(j) - \frac{e(j)}{C} A(j) \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_{\lambda}(j)^2 q_{\lambda}(j)^2 \right\} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \{ p_3(j)^2 + \omega_3(j)^2 q_3(j)^2 \} \quad (1)$$

1, 2, 3, : 直角座標成分

但し磁場は 3-軸に平行にとるものとし, 質量  $M=1$  の単位系をとる。ベクトルポテンシャル  $A=0$  とおけば一般の phonons の normal coordinates による表現である<sup>3)</sup>。以下式 (1) に基いて計算を進めることにし, 式 (1) に達するまでの変換の議論は別の機会に譲ることにする。

$$A = \left( -\frac{1}{2} H q_2, \frac{1}{2} H q_1, 0 \right),$$

$$\omega_L = e H / 2 M C : \text{Larmor 振動数} \quad (2)$$

の定義及び  $\omega_1 = \omega_2$  の場合に波動方程式を解こう。

## 2.2 固有函数及びエネルギー固有値

固有函数及び固有値を

$$\Psi = \prod_{j\lambda} \Psi(\lambda, j) \Psi(3, j), \quad E = \sum_j \left[ E(\lambda, j) + E(3, j) \right] \quad (3)$$

とおく。式 (1) に於て,  $\mathcal{H}_1 = \sum_{j=1}^N \omega_L(j) L_3(j)$  を除く残りのハミルトン函数を  $\mathcal{H}_0$  とすると, それに対してはよく知られた Hermite 函数及び次の固有値が求まる。即ち

$$E(\lambda, j) = \sum_{n_\lambda(j)} \left( n_\lambda(j) + \frac{1}{2} \right) \hbar \sqrt{\omega_\lambda(j)^2 + \omega_L(j)^2} \quad (4)$$

$$E(3, j) = \sum_{n_3(j)} \left( n_3(j) + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_3(j)$$

但し  $L_3(j) = [\mathbf{q}(j) \times \mathbf{p}(j)]_3$

さて  $\mathcal{H}_1$  も含めた方程式  $\mathcal{H}(j) \Psi(j) = E(j) \Psi(j)$  を  $\omega_1(j) = \omega_2(j) = \omega(j)$  の特別な場合に厳密に解くことが課題であるが  $\Psi(3, j)$  及び  $E(3, j)$  は式 (4) そのものであるから  $\Psi(\lambda, j)$  及び  $E(\lambda, j)$  を求めればよい。従って  $\lambda = 1, 2$  について極座標  $(r, \varphi)$  で表わし次の Shrodinger 方程式を得る。  $j, \lambda$  を省略して

$$\left[ -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} + (\omega^2 + \omega_L^2) r^2 \right]$$

$$+ i 2 \hbar \omega_L \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2E \} \Psi = 0 \quad (5)$$

解を次の様に定めよう。

$$\Psi_{n\ell} = \frac{1}{\sqrt{N_{n\ell}}} e^{i\ell\varphi} e^{-\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}}{2\hbar} r^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^{|\ell|/2} y\left(\frac{r^2}{2}\right) \quad (6)$$

式(5), (6) より  $y\left(\frac{r^2}{2}\right)$  は次の the associated Laguerre polynominal で表わされる。

$$y\left(\frac{r^2}{2}\right) = L_{\frac{n-|\ell|}{2}}^{|\ell|} \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}}{\hbar} r^2 \right\} \quad (7)$$

一方規格化定数  $N_{n\ell}$  及び固有値  $E_{n\ell}$  は

$$N_{n\ell} = 2\pi \left\{ \frac{\hbar}{2\sqrt{\omega_L^2 + \omega^2}} \right\}^{|\ell|+1} \frac{r^{\left\{ \frac{n+|\ell|}{2} + 1 \right\}}}{r^{\left\{ \frac{n-|\ell|}{2} + 1 \right\}}}, \quad (8)$$

$$E_{n\ell} = (n+1)\hbar\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \hbar\omega_L\ell \quad (9)$$

但し  $n=2m$  の場合  $|\ell| = 0, 2, 4, \dots, 2m$   
 $= 2m+1$  の場合  $|\ell| = 1, 3, 5, \dots, 2m+1$

### § 3. 自由エネルギー, エントロピー及び内部エネルギー

mode  $j$  の分配函数を  $Z_j$ ,  $\beta = 1/k_B T$  とすると

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell} \exp \{ -\beta \hbar [ (n+1) \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \omega_L \ell ] \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=n}^n e^{-\beta \hbar \{ (2n+1) \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - 2m\omega_L \}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=-(n+1)}^n e^{-\beta \hbar \{ (2n+2) \sqrt{\omega_L^2 + \omega^2} - (2m+1)\omega_L \}} \right\} \\ &= e^{\beta \hbar \sqrt{\omega_L^2 + \omega^2}} \left[ e^{\beta \hbar (\sqrt{\omega_L^2 + \omega^2} - \omega_L)} - 1 \right]^{-1} \left[ e^{\beta \hbar (\sqrt{\omega_L^2 + \omega^2} + \omega_L)} - 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

石井忠男

従って自由エネルギー  $F$  は

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \sum_j \ell_n Z_j \\ &= \frac{1}{\beta} \int d\omega g(\omega) \left[ \sum_{\epsilon=\pm 1} \ell_n \left\{ e^{\beta \hbar (\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L)} - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \beta \hbar \sqrt{\omega_L^2 + \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

但し  $g(\omega)$  は状態密度を表わす。(11) 式を用いてエントロピー  $S$  は,  $S = -\partial F / \partial T$  より

$$\begin{aligned} S &= -k_B \int_0^{\omega_D} d\omega g(\omega) \sum_{\epsilon} \left[ \ell_n \left\{ e^{\beta \hbar (\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L)} - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \beta \hbar \left\{ \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L \right\} \left\{ 1 - e^{-\beta \hbar (\sqrt{\omega_L^2 + \omega^2} - \epsilon \omega_L)} \right\}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

内部エネルギー  $U$  は  $U = -T^2 \partial (F/T) / \partial T$  より

$$\begin{aligned} U &= \hbar \int_0^{\omega_D} d\omega g(\omega) \left[ \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} + \sum_{\epsilon} \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L}{e^{\beta \hbar (\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L)} - 1} \epsilon \omega_L \right\} \right] \\ &= \sum_{\epsilon} \int_{\omega_L(1-\epsilon)}^{\sqrt{\omega_L^2 + \omega_D^2} - \epsilon \omega_L} d\omega_{\epsilon}' \frac{g\{\sqrt{(\omega_{\epsilon}' + \epsilon \omega_L)^2 - \omega_L^2}\}}{\sqrt{(\omega_{\epsilon}' + \epsilon \omega_L)^2 - \omega_L^2}} (\omega_{\epsilon}' + \epsilon \omega_L) \hbar \omega_{\epsilon}' \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\epsilon}'} - 1} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{但し } \omega_{\epsilon}' = \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} - \epsilon \omega_L \quad (13')$$

特に  $\omega_L = 0$  の場合には

$$U = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega \left[ \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right] \times 2$$

となり, 通常の 2 分極分の内部エネルギーを表わすのは当然の帰結である。式 (13) の物理的意味を明らかにするために, Debye の連続体模型による音響状態について考えよう。従って状態密度は  $g(\omega) = \omega^2 / 2\pi^2 C_s^3$  ( $C_s$ : 音速) とおけるから (13) 式は

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\epsilon} \int_0^{k_D} 4\pi k^2 dk \left\{ \frac{\hbar \omega_{\epsilon}'}{2} + \frac{\hbar \omega_{\epsilon}'}{e^{\beta \hbar \omega_{\epsilon}'} - 1} \right\} \quad (14)$$

$$\text{但し } \omega_{\epsilon}' = \sqrt{\omega_L^2 + k^2 C_s^2} - \epsilon \omega_L \quad (14')$$

以上の議論は非常に教訓的である。即ち、式(14)の  $\hbar \omega_{\epsilon}'$  を系の  $\epsilon = \pm 1$  の分極に於る単一モードのエネルギーと見做することができる。又計算の過程から  $\epsilon > 0$  は  $\ell > 0$  の和が、 $\epsilon < 0$  は  $\ell < 0$  の和がそれぞれ対応しており、従って  $\epsilon > 0$  は磁場方向に向って右旋回を意味し、 $\epsilon < 0$  は左旋回を意味している。このように磁場を印加することにより縮退がとける事情は Zeeman 効果と全く対応している。更に式(13)' (14)' は  $\omega = k C_s$  を示しており、式(9)の音響状態でのエネルギー準位を波数  $k$  で表現せしめる。§ 5. で以上の議論を鎖模型から検討してみよう。

#### § 4. 比熱と反磁性帯磁率

比熱  $C_V$  及び帯磁率  $\chi$  の計算を具体的に適当な近似のもとに遂行しよう。

##### 4.1 内部エネルギーと比熱

$C_V = (\partial U / \partial T)_{V,N}$  と式(13) とより Debye 模型のもとに

I.  $\beta \hbar \omega_D, \beta \hbar \omega_L \ll 1$

$$U = \sum_{\epsilon} U_{\epsilon} = \frac{\omega_D^3}{6\pi^2 C_s^3 \beta} \times 2, \quad (\text{零点エネルギーは除く} \\ \text{以下同じ})$$

$$\therefore C_V = \sum_{\epsilon} C_{V\epsilon} = 2 N k_B \quad (15)$$

以下全く同様に特に断わらない限り 2 分極分の量を示す。

II.  $\beta \hbar \omega_D \gg 1$

$$U_{\epsilon} = \frac{\hbar}{2\pi^2 C_s^3} \frac{1}{(\beta \hbar)^4} \int dx \sum_{s=1}^{\infty} e^{-sx} x (x + \epsilon \beta \hbar \omega_L) \sqrt{(x + \epsilon \beta \hbar \omega_L)^2 - (\beta \hbar \omega_L)^2} \\ \beta \hbar \omega_L (1 - \epsilon)$$

上限  $\rightarrow \infty$  とおいて

$$= \frac{\hbar \omega_L}{2\pi^2 C_s^3 \hbar^3 \beta^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dS} e^{\epsilon \beta \hbar \omega_L S} \frac{d}{dS} \frac{\mathcal{K}_1(\beta \hbar \omega_L S)}{S} \quad (16)$$

但し  $\mathcal{K}_\nu(x)$  : 第2種  $\nu$  次変形 Bessel 函数である<sup>4)</sup>。

$$(i) \quad \beta \hbar \omega_L \ll 1$$

$$\mathcal{K}_1(x) \doteq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (r-1)x + O\{x^3\}, \quad \text{for } x \ll 1 \quad (5)$$

$r$  : Euler の定数

$$\text{Rieman の } \zeta\text{-函数}^{6)} : \zeta(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{S^x},$$

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(3) = \pi^3/25.79436 \dots, \quad \dots$$

$$\zeta(4) = \pi^4/90 \quad (17)$$

を用いて  $O\{(\beta \hbar \omega_L)^2\}$  まで求めると

$$\sum_{\epsilon} U_{\epsilon} = \frac{1}{\beta^4 \hbar^3 C_s^3} \sum_{\epsilon} \left[ \frac{\pi^2}{30} + \epsilon \frac{\pi \beta \hbar \omega_L}{12 \cdot 897} + \frac{(\beta \hbar \omega_L)^2}{12} \right] \quad (18)$$

3-軸方向まで加えた全比熱  $C_V = \sum_{\epsilon} C_{V\epsilon} + C_{V3}$  は

$$C_V = \frac{4\pi^4}{5} N k_B \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \{ 3 + 0.254 (\hbar \omega_L / k_B T)^2 \} \quad (19)$$

$\hbar \omega_L = 0$  で通常の  $T^3$ -Law を示す。但し  $\theta$  : Debye 温度

$$(ii) \quad \beta \hbar \omega_L \gg 1$$

$$\mathcal{K}_1(x) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad \text{for } x \gg 1 \quad (7)$$

を用いて

$$\sum_{\epsilon} U_{\epsilon} = \frac{3\zeta\left(\frac{5}{2}\right)(k_B T)^{5/2}}{2^{5/2} \pi^{3/2} C_s^3 \hbar^{3/2}} \omega_L^{3/2} \left[ 1 + \frac{4}{3\zeta\left(\frac{5}{2}\right)} \left( \frac{\hbar \omega_L}{k_B T} \right) e^{-2\hbar \omega_L / k_B T} \right] \quad (21)$$

ここで1項目は  $\epsilon = 1$  より, 2項目は  $\epsilon = -1$  より計算された結果である。従って  $C_V$

は,

$$\sum_{\epsilon} C_{V\epsilon} = \frac{15 \sqrt{3} \zeta(\frac{5}{2}) k_B \sqrt{N}}{8 \sqrt{\pi} C_s^{3/2}} \omega_L^{3/2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^{3/2} \times$$

$$\left[ 1 + \frac{16}{15 \zeta(\frac{5}{2})} \left(\frac{\hbar \omega_L}{k_B T}\right)^2 e^{-2\hbar \omega_L / k_B T} \right] \quad (22)$$

以上の結果に従来の 3-軸方向へ分極した通常の結果の和が全内部エネルギー及び全比熱であるが極めて異った様相を呈していることが判る。 $\beta \hbar \omega_L \gg 1$  より (22) 式の 2 項目を無視すれば,  $(\hbar \omega_L)^{3/2} (k_B T)^{3/2}$  に比例して変化することは注目に値する。

#### 4.2 帯磁率

$\chi = -(2MC/e)^2 (1/\omega_L) (\partial F / \partial \omega_L)_{T,V,N}$  と式 (11) とより

$$\chi = - \left(\frac{2MC}{e}\right)^2 \frac{\hbar}{2\pi^2 C_s^3} \left[ - \sum_{\epsilon} \epsilon \frac{\omega_D^3}{3\omega_L} + \frac{1}{2} \left\{ \omega \sqrt{\omega_D^2 + \omega_L^2} \right. \right.$$

$$\left. - \omega_L^2 \ln \frac{\omega_D + \sqrt{\omega_D^2 + \omega_L^2}}{\omega_L} \right\}$$

$$- \sum_{\epsilon} \epsilon \frac{1}{\omega_L (\beta \hbar)^3} \int \frac{\beta \hbar (\sqrt{\omega_L^2 + \omega_D^2} - \epsilon \omega_L)}{\beta \hbar \omega_L (1-\epsilon)} dx \frac{x \sqrt{(x + \epsilon \beta \hbar \omega_L)^2 - (\beta \hbar \omega_L)^2}}{e^x - 1} \quad (23)$$

##### 1. $\beta \hbar \omega_D \ll 1$

式 (23) の第 4 項目の積分は  $\epsilon$  に依存しないから,  $\chi$  には 2, 3 項目が寄与する。

故に

$$\chi = \chi_0 = - \left(\frac{MC}{e}\right)^2 \frac{\hbar}{\pi^2 C_s^3} \left[ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \omega_L^2} - \omega_L^2 \ln \frac{\omega_D + \sqrt{\omega_D^2 + \omega_L^2}}{\omega_L} \right] \quad (24)$$



$\chi_0$  は常に負であるから，反磁性を示す。

## II. $\beta \hbar \omega_D \gg 1$

式(23)の積分の上限  $\rightarrow \infty$  とおいて

$$\chi = \chi_0 - 2 \left( \frac{MC}{e\pi} \right)^2 \frac{1}{C_s^3 \beta^2 \hbar^3} \sum_{\epsilon} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dS} \left[ \frac{e}{S} K_1(\epsilon \beta \hbar \omega_L S) \right] \quad (25)$$

### (i) $\beta \hbar \omega_L \ll 1$

関係式(17)を用い， $O\{\beta \hbar \omega_L\}$  まで求めると

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + \frac{2}{3} \left( \frac{MC}{e} \right)^2 \frac{1}{\beta^2 \hbar C_s^3} \\ &= - \left( \frac{MC}{e} \right)^2 \frac{\hbar \omega_D^2}{\pi^2 C_s^3} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_L}{\omega_D} \right)^2} - \left( \frac{\omega_L}{\omega_D} \right) \right) \ln \frac{\omega_D + \sqrt{\omega_D^2 + \omega_L^2}}{\omega_L} \\ &\quad - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{1}{\beta \hbar \omega_D} \right)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

$(\omega_L/\omega_D) \ll 1$ ， $\beta \hbar \omega_D \gg 1$  より反磁性を示しているが，積分の項は反磁性を緩和するよう働いている。このことは次の場合でも同じである。

### (ii) $\beta \hbar \omega_L \gg 1$

$$\chi = \chi_0 + \left( \frac{MC}{e} \right)^2 \frac{3 \zeta(\frac{5}{2}) (k_B T)^{5/2}}{2^{1/2} \pi^{3/2} C_s^3 \hbar^{3/2} \omega_L^{1/2}} \left[ 1 - \frac{4}{3 \zeta(\frac{5}{2})} \left( \frac{\hbar \omega_L}{k_B T} \right) e^{-2 \frac{\hbar \omega_L}{k_B T}} \right] \quad (27)$$

式(27)の〔 〕の2項目を無視し，式(26)と同じように書き直すと，式(26)の3項目の  $-(2\pi^2/3)(1/\beta \hbar \omega_D)^2$  が  $-3 \sqrt{\pi/2} \zeta(5/2) (k_B T)^{5/2} / (\hbar \omega_D)^2$   $(\hbar \omega_L)^{1/2}$  と置き代わる。従ってやはり反磁性を緩和するよう働く。式(27)の2項目は  $\epsilon = 1$ ，又3項目では  $\epsilon = -1$  にそれぞれ対応しており，その限りでは右旋回

に対応する分極が反磁性を緩和していることが判る。これは電荷  $e > 0$  では当然の結果である。

右旋回  $\epsilon = 1$  のエネルギーの値は、式 (18) 及び式 (21) に見られる如く、左旋回のそれより大きい。更に  $\epsilon = 1$  の  $\chi$  への寄与は、式 (27) で見た如く、常磁性効果として働き、 $\epsilon = -1$  の反磁性への寄与よりも絶対値は大きい。これらのことは次の様に解釈できよう。即ち  $\epsilon = 1$  のエネルギー準位は  $\epsilon = -1$  のそれより低い為、与えられた温度  $T$  のもとに於る charged phonons の数は  $\epsilon = 1$  の方が  $\epsilon = -1$  より勝る。

式 (18) 及び (26) についてはそれぞれ  $O\{(\beta \hbar \omega_L)^3\}$ ,  $O\{(\beta \hbar \omega_L)^2\}$  までとれば (1) の為発散する。従って  $O\{(\beta \hbar \omega_L)^2\}$ ,  $O\{(\beta \hbar \omega_L)\}$  までで打切っている。

### § 5. 鎖模型による分散式

以下の議論は連続体模型によっていきなり計算する方法によってもよいが、ここでは鎖模型<sup>8)</sup>から考察を進めることにする。図の様に磁場及び伝播方向に垂直な面内で原子が運動するとしよう。s番目の面の変位を  $u_s$ 、その面内の1つの原子に働く力を比例定数  $\Phi_p$  として

$$F_s = \sum_p (u_{s+p} - u_s) \Phi_p \quad (28)$$

とすると、運動方程式は、原子の質量  $M$  として

$$M \frac{d^2 u_s}{dt^2} = F_s + \frac{e}{c} \dot{u}_s \times H \quad (29)$$

$$\text{今 } u_s^\pm = u_{sx} \mp i u_{sy}$$

$$u_s^\pm = u_{(0)}^\pm e^{i s k a - i \omega' t}$$

とおいて式 (29) より次の分散式を得る。 $\epsilon = \pm 1$  として

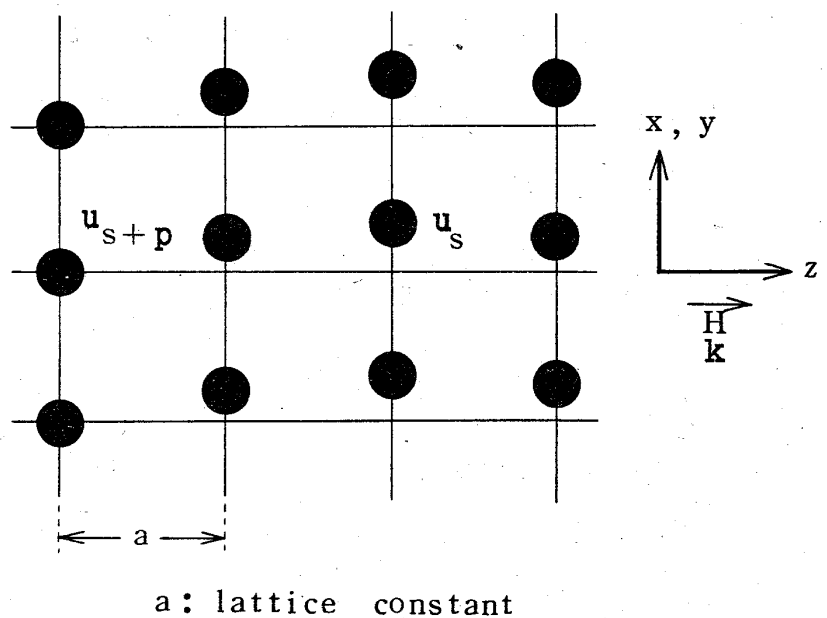


Fig. 1 Chain model

$$\omega'^2 + 2\varepsilon \omega' \omega_L - \frac{2}{M} \sum_p \Phi_p (1 - \cos pka) = 0 \quad (30)$$

ここで最近接相互作用のみを考えれば，式 (30) で  $p=1$  において

$$\omega' = -\varepsilon \omega_L + \left[ \omega_L^2 + \frac{4\Phi_1}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \right]^{1/2} \quad (31)$$

〔→ 図 2〕

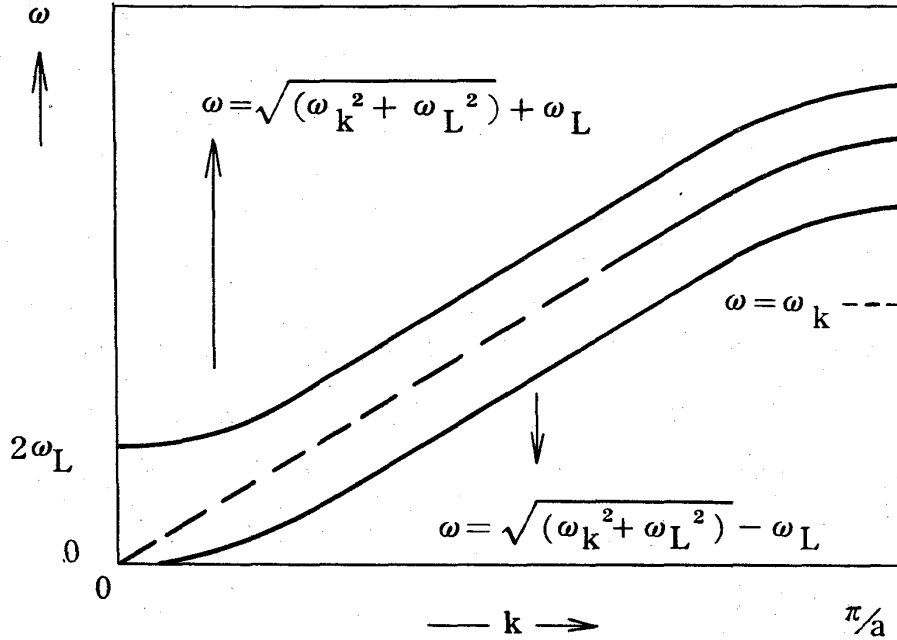


Fig. 2. Dispersion,  $\omega_k = \sqrt{4\Phi_1/M} \sin \frac{1}{2}ka$

従って Debye 近似に移行すると

$$\omega' = \sqrt{\omega_L^2 + k^2 C_s^2} - \varepsilon \omega_L \quad (32)$$

これは式 (14)' の分散関係と全く一致する。式 (30) に於る  $\varepsilon$  は  $u^\pm$  に対応して右旋回左旋回に分極を示しており § 3. の議論と全く一致する。更に左旋回は  $e > 0$  であることより角振動数  $\omega'$  が増え，右旋回は減る。このことは量子論ではエネルギー準位の増減に対応し，式 (9) 及び式 (14)' はこれを物語っている。

## § 6. 結 言

序の部分でも述べたように超高磁場によって荷電格子の振動が量子化され、その結果比熱及び反磁性効果に反映することを簡単に議論を行ってきた。しかし問題はこれで終わったのではなく、更に検討する必要がある、電気伝導等諸現象へと広げてゆくものである。

最後に電場の効果を簡単に触れておく。

$A = 0$ ,  $\mathcal{H}_E = -e\mathbf{q}(j) \cdot \mathbf{E}$  とおけば

$$\Psi_n(q') = N_n H_n(\alpha q') e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 q'^2}, \quad \alpha = (\omega/\hbar)^{1/2} \quad (33)$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - (eE)^2 / 2\omega^2$$

となり、 $q' = q - eE/\omega^2$  だけの座標の shift と、エネルギー固有値の負への shift を示している。

この小論を終るに当り、常日頃暖い御支持を頂いている犬石教授、吉田教授、橋本助教授、及び万戎教授に感謝の意を表したい。

## 参考文献

- 1) L.Landau: Z. Phys. 64 (1930) 629.
- 2) H.Knoepfel: Pulsed High Magnetic Field (North-Holland, Amsterdam, 1970) chap. 1.
- 3) M.Born and K.Huang: Dynamical Theory of Crystal Lattices (Clarendon, London, 1954) chap. 4.
- 4) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 III (岩波, 東京, 1960) p.170.
- 5) 4) に同じ
- 6) 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 I (岩波, 東京, 1957) p.39
- 7) 4) に同じ
- 8) C.Kittel: Introduction to Solid State Physics (John Wiley & Sons, New York, 1966) chap. 5.